1 Intervalles de IR

1.1 Définitions

Soient deux nombres réels a et b tels que : $a < b$

Le symbole ∞ se lit : **infini**

L'intervalle noté…	est l'ensemble des réels x tels que :	On le représente sur l'axe réel par :
[a ; b]	$a \leq x \leq b$	
] a ; b [	$a < x < b$	
[a ; b [	$a \leq x < b$	
] a ; b]	$a < x \leq b$	
[a ; + ∞ [	$a \leq x$	
] a ; + ∞ [	$a < x$	
] – ∞ ; b]	$x \leq b$	
] – ∞ ; b [	$x < b$	

<u>Exercice</u> Compléter les cases du tableau par l'un des symboles ∈ ou ∉ :

	[2 ; 3]	[2 ; + ∞ [	] 2 ; + ∞ [	] – ∞ ; 3 [	] – ∞ ; 3]	] 2 ; 3 [	] 2 ; 3]	[2 ; 3 [
1	∉	∉	∉	∈	∈	∉	∉	∉
2	∈	∈	∉	∈	∈	∉	∉	∈
2,5	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈
3	∈	∈	∈	∉	∈	∉	∈	∉
4	∉	∈	∈	∉	∉	∉	∉	∉

1.2 Union et intersection

Dans ce paragraphe, I et J désignent deux intervalles de IR, dont les bornes peuvent être finies ou non.

Définition 1

On appelle réunion de I et J, et on note : l'ensemble des réels x tels que :

Exemples

1) Représenter, sur la droite réelle, l'ensemble des réels x tels que : $x \in]-\infty ; -3] \cup [1 ; 2]$

2) Les réels suivants : $1 ; 2 ; \frac{5}{2} ; 3 ; 4 ; 5 ; 6$ et 7 appartiennent ils à : $D = [2 ; 3[\cup [5 ; 7[$?

Définition 2

On appelle intersection de I et J, et on note : l'ensemble des réels x tels que :

Exemples Représenter, sur la droite réelle, les intervalles : $[-3 ; 4]$ et $]-2 ; 6]$

Ecrire plus simplement l'ensemble : $[-3 ; 4] \cap]-2 ; 6]$

Les réels suivants : $-3 ; -1 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8$ et 10 appartiennent ils à : $D = [-2 ; 6[\cup [0 ; 8[$

1.3 Notations

IR_+ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls. $IR_+ =$

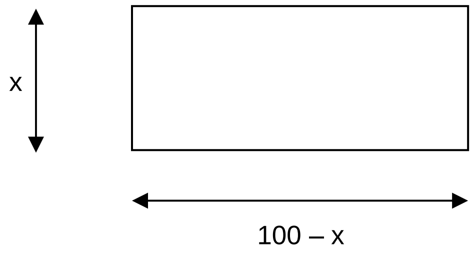
IR_- désigne l'ensemble des réels négatifs ou nuls. $IR_- =$

IR_+^* désigne l'ensemble des réels strictement positifs. $IR_+^* =$

IR_-^* désigne l'ensemble des réels strictement négatifs. $IR_-^* =$

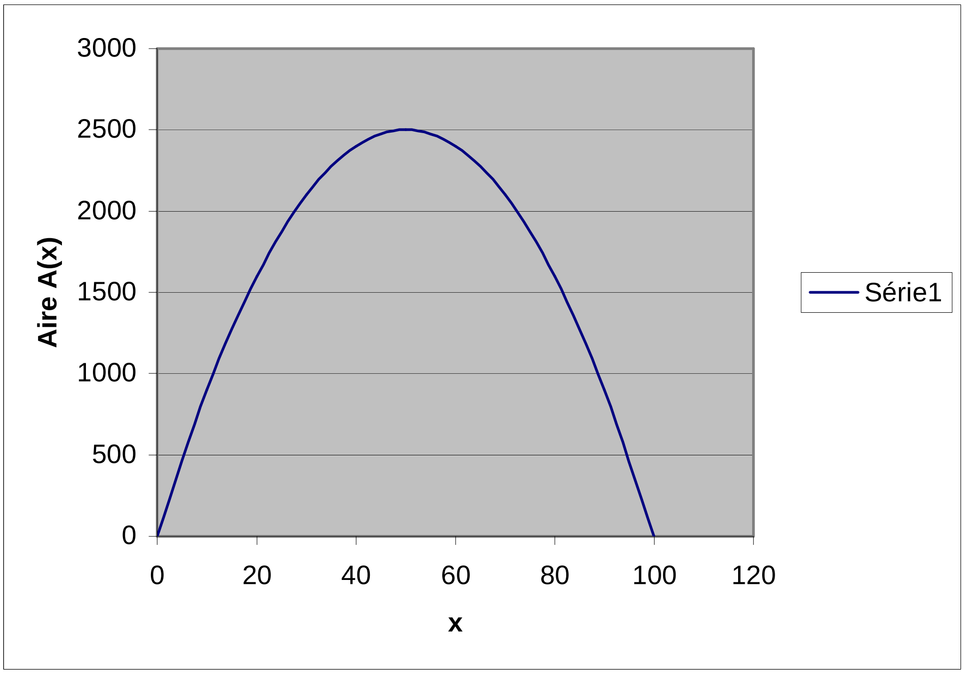
2 Fonctions : vocabulaire

On construit un pré rectangulaire avec une clôture de 200m de long.
On représente sur ce graphique l'évolution de l'aire du pré A(x) en fonction de x.



On a regroupé des résultats dans le tableau suivant :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100 – x	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
A(x)	0	900	1600	2100	2400	2500	2400	2100	1600	900	0



Quelle est l'aire du pré lorsque x mesure 20 m ?

Pour quelle valeur de x l'aire du pré est elle égale à 2100m^2 ?

Quelle est l'aire maximale du pré ? que vaut alors x ?

Pour quel(s) intervalle(s) l'aire du pré augmente elle ?

3 Définitions

Définir une fonction s’effectue en deux étapes :

1°) Donner un ensemble de départ, appelé

c’est à dire l’ensemble des nombres « concernés » par la fonction.

2°) Associer à chaque nombre x de l’ensemble de déf inition un réel **unique**, appelé :

En règle générale, l’ensemble de départ est noté : Et les fonctions sont notées :

L’image d’un réel x par une fonction f est noté : qui se lit :

On peut aussi décrire une fonction f comme une machine ou une « boite magique » ; on introduit dans la boite magique chaque nombre du domaine de définition, et il en sort son image f(x).

Pour la fonction de l’introduction, donner le domaine de définition, l’image de 10 , de 25, de 30.
Quel nombres ont pour image 1600 ?

Définition On appelle antécédent de y par la fonction f un réel x tel que :

Donner les antécédents de y par f, c’est donner tous les réels x qui ont pour image y.

Il peut y en avoir un seul, deux, plusieurs… et aussi aucun !

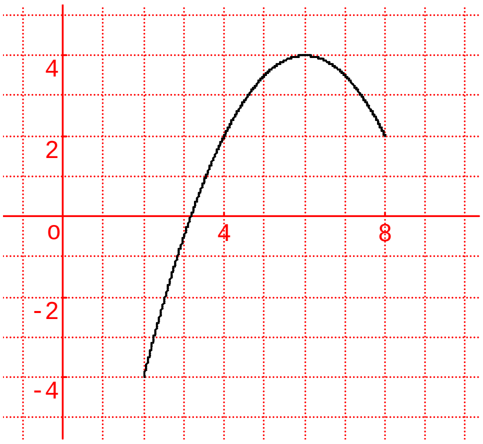
Exemple Avec la fonction de l’introduction, donner les antécédents de : 1600 ; 2500 et – 1000 .

4 Deux manières de définir des fonctions

4.1 Méthode graphique

On a vu dans l'activité d'introduction la représentation dans un repère, d'une fonction.
Certaines fonctions sont, quant à elles, définies par des courbes.

Exemple : On donne ici la courbe représentative d'une fonction g.



Quel est le domaine de définition de g ?

Quel sont les images de 4 , de – 2 , de 9 ?

Donner les antécédents de : 2 ; 0 et 5.

ATTENTION ! Toutes les courbes tracées dans un repère ne définissent pas des fonctions. Pour être conforme à la définition, chaque réel x doit avoir une image UNIQUE, la courbe doit donc impérativement progresser « de gauche à droite » sans « revenir en arrière ».

4.2 Méthode algébrique

On peut aussi définir une fonction en donnant directement le domaine et la formule de calcul de l'image d'un réel x.

Par exemple : f est la fonction définie sur [–5 ; 4] par : $f(x) = x^2 + 3$

Donner par cette fonction les images de -5 ; -2 ; 0 ; $\frac{1}{2}$; 4 et 7 .

Plutôt que d'écrire à chaque fois : « f est la fonction, définie sur D, qui à x associe f(x) »

On peut écrire :

Exemple : g définie sur [2 ; 5 [: $x \longmapsto 2x - 5$

Déterminer : g(3) ; g(6) ; g (2) et g(5).

5 Représentation graphique d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle D. La courbe représentative, dans un repère, de la fonction

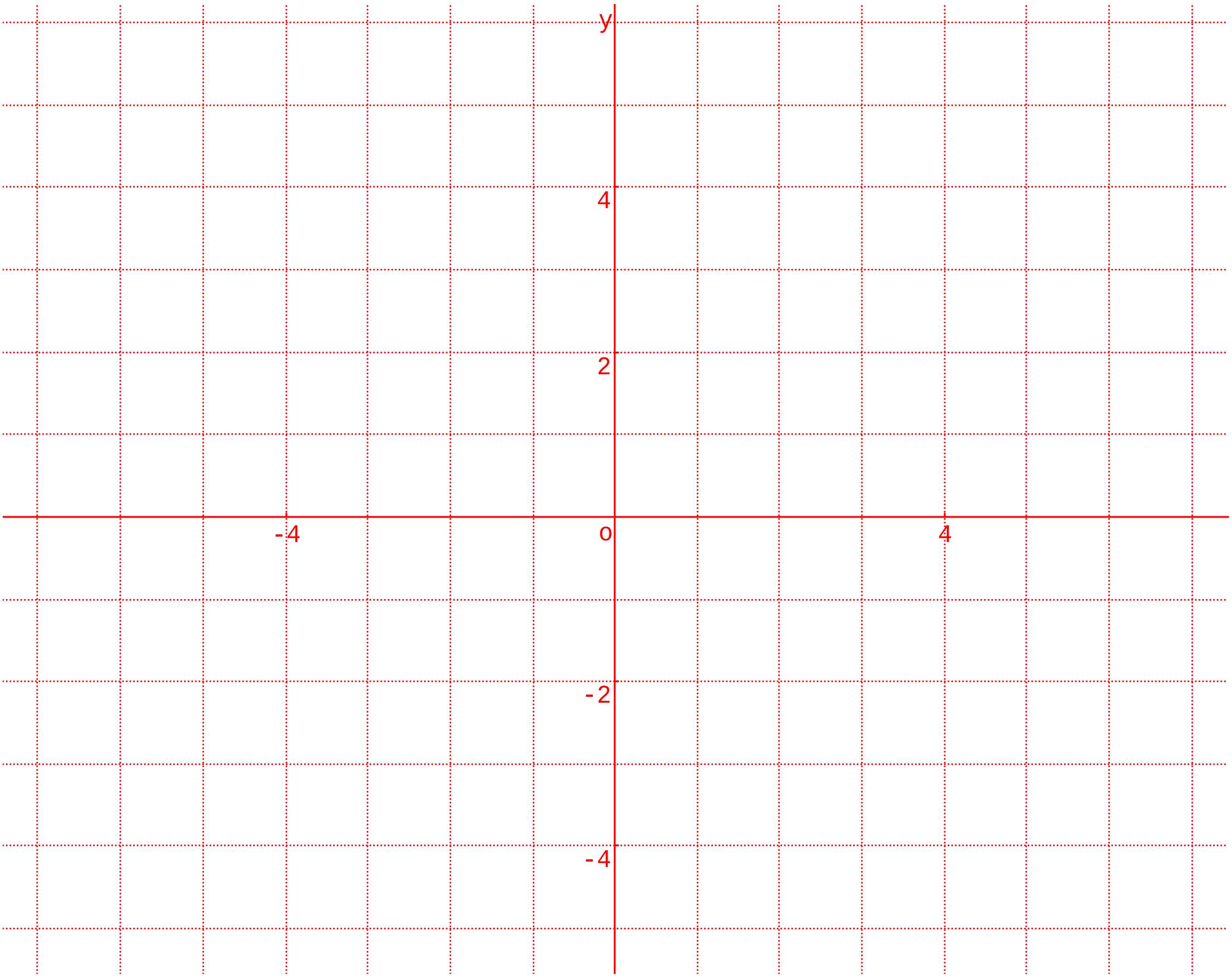
f est l'ensemble des points de coordonnées : où x parcourt D.

Dans la pratique, pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on remplit un **tableau de valeurs**, c'est à dire un tableau donnant un certain nombre de réels x de D et leurs images.

Exemple : g est définie sur [–1 ; 3] par : $g(x) = x^2 – 4$

Remplir le tableau de valeurs suivant et tracer une allure de la courbe représentative de g.

x	–1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)									



6 Variations d'une fonction

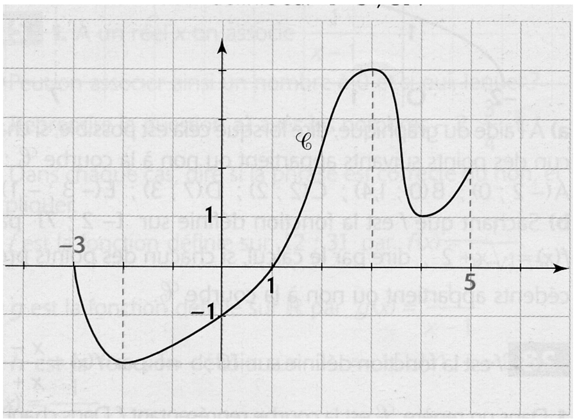
Définition : Une fonction est dite croissante sur un intervalle I si pour tous a et b dans I tels que :

a $\leq$ b on a :

Définition : Une fonction est dite décroissante sur un intervalle I si pour tous a et b dans I tels que :

a $\leq$ b on a :

Exercice: Estimer, par lecture graphique, les variations de la fonction f définie par la courbe suivante. Dresser ensuite le tableau de variations de f.



Définition On dit que M est le maximum d'une fonction f sur un intervalle I si M est

On dit que m est le minimum d'une fonction f sur un intervalle I si m est

Exercice Dans la fonction f de l'exercice précédent, préciser :

- Le maximum de f et pour quelle(s) valeur(s) il est atteint.
- Le minimum de f et pour quelle(s) valeur(s) il est atteint.

Quel est le minimum de f sur [2 ; 5] ? Quel est le maximum de f sur [–3 ; 0] ?

7 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Dans ce paragraphe, on suppose que f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble D et que k est un réel fixé. On appelle C_f la courbe représentative de f et C_g celle de g.

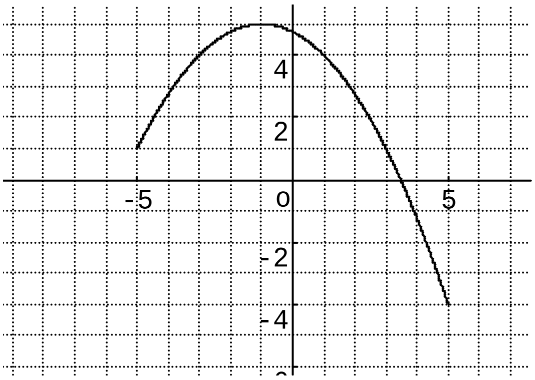
– Alors les solutions de l'équation : $f(x) = k$

sont les abscisses des points

– Les solutions de l'inéquation : $f(x) \geq k$

sont les abscisses des points

Exemple : Résoudre graphiquement :



$f(x) = 4$

$f(x) \geq 4$

$f(x) = -2$

$f(x) < 3$

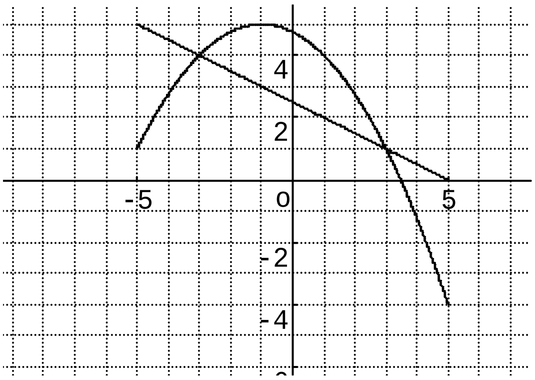
– Avec les mêmes notations, les solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$

sont les abscisses des points

– Les solutions de l'équation : $f(x) \geq g(x)$

sont les abscisses des points

Exemple : Résoudre graphiquement :

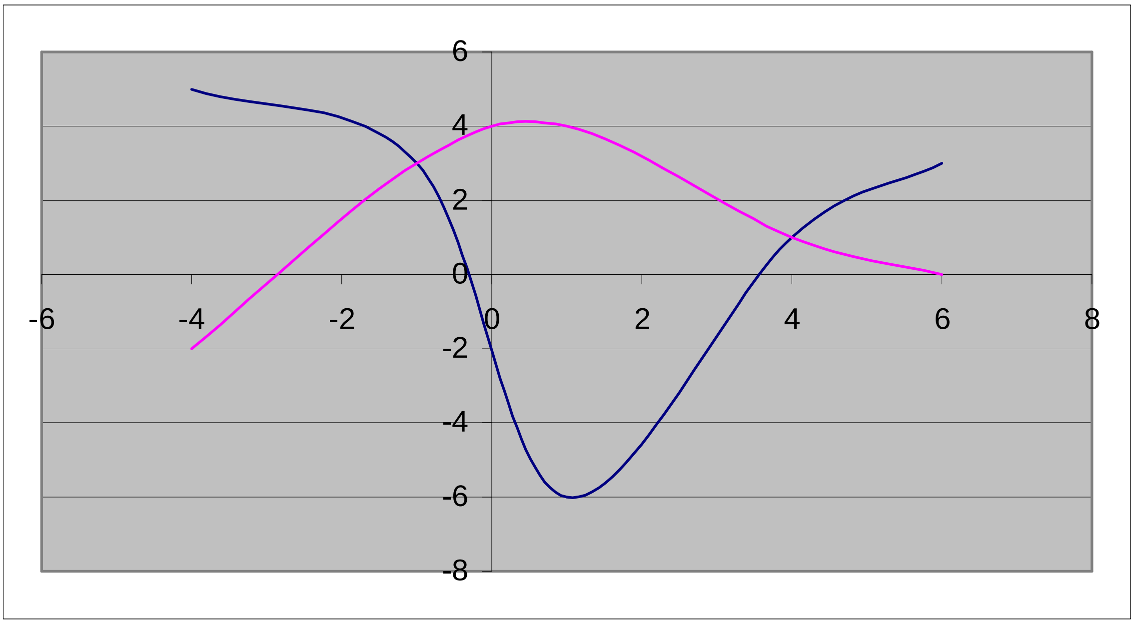


$f(x) = g(x)$

$f(x) \geq g(x)$

Exemple 2:

On donne les courbes représentatives de deux fonctions g et h.



Préciser : L'ensemble de définition de g et h.

Résoudre, par lecture graphique : $g(x) = -2$; $h(x) = g(x)$; $g(x) \leq h(x)$ et $g(x) > h(x)$