Chapitre 3 : Equations et inéquations dans IR

1 Equations dans IR

1.1 Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation

Dans chaque cas, dire si le réel x est solution de l'équation proposée.

a) $x = 1$; $2x + 3 = 5$ b) $x = \frac{5}{3}$; $-3x - 10 = 5$ c) $x = 3$; $x^2 - 5 = 4$

1.2 Equations du premier degré

Une équation du premier degré est une équation, d'inconnue x, du type : $\boxed{ax + b = cx + d}$
Où a, b, c et d sont des réels quelconques avec $a \neq c$.

Pour la résoudre, il faut **isoler** x d'un côté de l'égalité. Les transformations autorisées sont :

- L'ajout ou le retrait d'une même quantité à gauche et à droite de l'égalité.
- Multiplier ou diviser les membres de gauche et de droite de l'égalité par une même quantité.

Par exemple, résolvons l'équation : $2x - 3 = 5$

1.3 Equations produits

Théorème Un produit est nul si et seulement si

On peut utiliser ce théorème pour résoudre des équations sous la forme d'un produit égal à zéro.

<u>Exemple</u> résoudre l'équation : $(2x - 3).(5x - 10) = 0$

1.4 Equations quotients

Théorème Une fraction de deux quantités réelles est nulle si et seulement si

On peut utiliser ce théorème pour résoudre des équations sous la forme d'un produit égal à zéro.

<u>Exemple</u> résoudre l'équation : $\frac{2x - 4}{x + 3} = 0$

1.5 développer et factoriser

rappelons les identités remarquables :

$(a + b)^2 =$

$(a - b)^2 =$

$(a + b).(a - b) =$

Exemple : Développer : $(2 + x)^2$

Factoriser : $4 - t^2$

Factoriser : $(x + 3).(2x - 1) - (x + 3).(4x + 5)$

Le coup du 1 :

Parfois, quand on factorise une somme, le facteur commun de la somme apparaît « seul », c'est à dire sans être facteur d'une autre quantité. Il faut alors penser au « coup du 1 ».

Exemple Factorisons : $(1 + 2x).(3 - 5x) + (1 + 2x)$

En déduire les solutions de : $(1 + 2x).(3 - 5x) + (1 + 2x) = 0$

Le coup du carré :

Parfois, quand on factorise une somme, le facteur commun de la somme apparaît élevé au carré. Il faut alors penser au « coup du carré ».

Exemple Factorisons : $(2 + 3x).(3 - 5x) + (2 + 3x)^2$

En déduire les solutions de : $((2 + 3x).(3 - 5x) + (2 + 3x)^2 = 0$

2 Inéquations

2.1 Inéquations du premier degré

Les opérations autorisées sur les inéquations sont les mêmes que pour les équations. Toutefois, il y a un règle opératoire supplémentaire : lorsque l'on multiplie et divise les deux membres de l'inégalité par un réel strictement **négatif :**

Exemple : Résoudre l'inéquation : $-2x + 3 \leq 13$

2.2 Signe de ax + b

Etudier le signe d'une expression, c'est dire quand cette expression est positive et dire quand elle est négative.
Pour étudier le signe d'une expression du type : $ax + b$ (avec $a \neq 0$)

– On détermine l'unique solution x_0 de l'équation :

– On applique ensuite la règle suivante :

« à gauche » de x_0 :	$ax + b$	est du signe
« à droite » de x_0 :	$ax + b$	est du signe

On peut enfin livrer le résultat dans un tableau de signes.

Exemple : Etudier le signe des deux expressions : $2x - 4$ $-4x + 16$

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x - 4$	

2.3 Inéquations produits

On peut étudier le signe d'un produit de plusieurs facteurs grâce à la règle des signes :
Le produit de deux nombres réels de même signe est :

Le produit de deux réels de signes contraires est :

Exemple : Etudier le signe du produit : $(2x - 2).(-4x - 12)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x - 2$			
$-4x - 12$			
$(2x - 2).(-4x - 12)$			

Pour quelles valeurs de x le produit : $(2x - 2).(-4x - 12)$ est-il positif ?

2.4 Inéquations quotients

On peut également, grâce à la règle de signes, étudier le signe d'un quotient. Pour cela on étudie le signe du numérateur et du dénominateur.

Ensuite, il faut se rappeler les deux règles suivantes :

Lorsque le numérateur d'un quotient est nul,

Lorsque le dénominateur d'un quotient est nul,

Exemple : Etudier le signe du quotient suivant : $\dfrac{2x-6}{-4x+8}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-6$			
$-4x+8$			
$\dfrac{2x-6}{-4x+8}$			

3 Comparaison de nombres

3.1 Règles de comparaison

Comparer deux nombres, c'est dire lequel est le plus petit et lequel est le plus grand.

Dans beaucoup de cas, pour comparer deux réels A et B, on étudie le

On a la propriété suivante :

Si $A - B \leq 0$	Si $A - B \geq 0$
Alors :	Alors :

Exemple : Comparer les réels A et B définis par : $A = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $B = \dfrac{2}{x^2+1}$

3.2 Comparaison de a , a^2 et a^3 lorsque a est positif

Soit a un nombre positif. On souhaite comparer les nombres : a^2 et a .

Pour cela, on étudie le signe de leur différence d : $d = a^2 - a$

On en déduit le théorème suivant : Soit a un réel strictement positif.

Si $a > 1$:	Si $0 < a < 1$:

4 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition Soit x un réel quelconque. La valeur absolue de x, notée : se calcule comme suit :

Si $x \geq 0$:	Si $x \leq 0$:

Exemples Calculer la valeur absolue des réels : 5 ; -3 ; $-\frac{1}{4}$; π ; $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

Propriété : Soit deux réels x et y représentés sur l'axe réel. Alors :

la distance entre x et l'origine est égale à :

la distance entre les nombres x et y est égale à :

Exemple :

Représenter sur l'axe réel ci dessous, les réels $x = 3$ et $y = -4$

Calculer la distance entre x et l'origine, la distance entre y et l'origine, et la distance entre x et y.