

1 Les ensembles de nombres

1.1 Les nombres entiers naturels

L'ensemble des nombres entiers **naturels** est noté : $\mathbb{N}$. $\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 \dots \}$

On peut aussi dire que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs.

1.2 Les nombres entiers relatifs

L'ensemble des nombres entiers **relatifs** est noté : $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \{ \dots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots \}$

Exercice 1: Répondre par vrai ou faux :

8 fait partie des nombres entiers naturels : V

8 fait partie des nombres entiers relatifs : V

-5 fait partie des nombres entiers naturels : F

-5 fait partie des nombres entiers relatifs : V

1,8 fait partie des nombres entiers naturels : F

1,8 fait partie des nombres entiers relatifs : F

1.3 Les nombres rationnels

L'ensemble des nombres **rationnels** est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction de nombres entiers relatifs.

Par exemple : $\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{5}$; $\frac{4}{5}$ sont des nombres rationnels.

L'ensemble des nombres **rationnels** est noté : $\mathbb{Q}$

1.4 Les nombres irrationnels

Certains nombres ne peuvent pas s'écrire sous la forme de fractions de nombres entiers. Pour désigner ces nombres, les mathématiciens ont dû inventer des écritures particulières car ils ne pouvaient pas les écrire avec les fractions.

Par exemple : $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$

Ces nombres, qui ont une écriture « compliquée », sont appelés les nombres **irrationnels**, ils s'opposent aux nombres **rationnels** qui ont une écriture « simple » sous forme de fractions d'entiers.

1.5 L'ensemble de tous les nombres

Si on réunit l'ensemble des nombres rationnels (toutes les fractions) et l'ensemble des nombres irrationnels, on a alors regroupé tous les nombres qu'on connaît.

On a ainsi construit l'**ensemble de tous les nombres**, aussi appelé ensemble des nombres **réels**, qui est noté : $\mathbb{R}$

1.6 les nombres décimaux

Les nombres décimaux sont les nombres qui admettent une écriture décimale finie, c'est à dire qu'on peut écrire sous la forme d'un nombre

Les nombres suivants sont ils des nombres décimaux ?

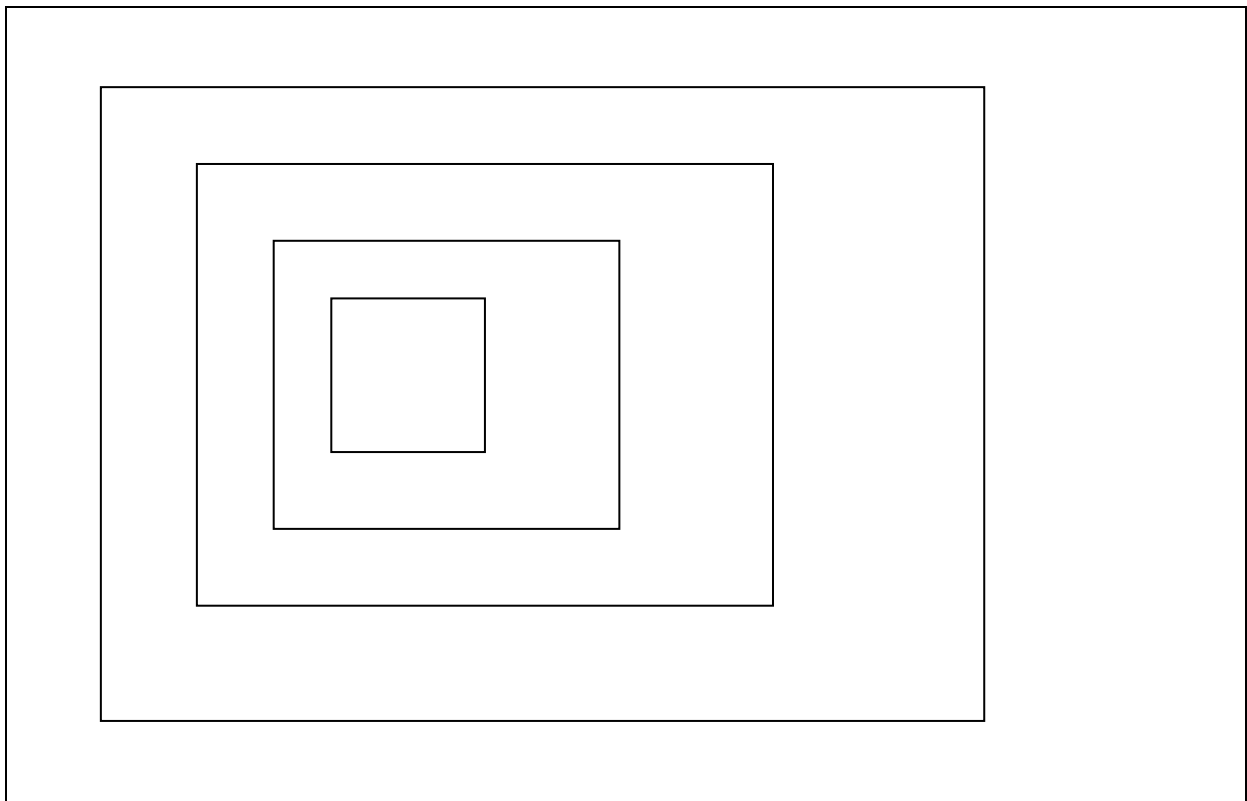
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	2,514	8	-17,5	$-\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	π	-10^{15}
oui	non	oui	oui	oui	oui	non	non	oui

L'ensemble des nombre décimaux est noté : ID

Tous les nombres décimaux sont aussi des nombres rationnels. La réciproque est elle vraie ou fausse ?

1.7 Récapitulation

On peut représenter les divers types de nombres dans des **boîtes** :



Sur ce schéma, on lit que $\mathbb{Q}$ est une partie de $\mathbb{IR}$. On dit aussi que $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{IR}$, et on le note : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{IR}$

de même $\mathbb{IN} \subset \mathbb{Q}$ ou aussi $\mathbb{IN} \subset \mathbb{Z}$

On peut alors donner le diagramme suivant : $\mathbb{IN} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{IR}$

2 Arithmétique

2.1 Vocabulaire

On étudie, dans ce paragraphe, quelques propriétés des nombres de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Regardons l'égalité suivante : $35 = 5 \times 7$

Le reste de la division euclidienne de 35 par 7 est nul.

On peut donc dire que 7 est un diviseur de 35, ou alors que 35 est un multiple de 7.

Exercice Donner un diviseur de 60, et donner un multiple de 4. Donner tous les diviseurs de 28.

Un diviseur de 60 est 10. Un multiple de 4 est 12.

Les diviseurs de 28 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 et 28.

2.2 Nombres premiers

Définition Soit n un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$), avec $n \geq 2$. On dit qu'un entier naturel n est premier si et seulement si il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Par convention : $n = 1$ n'est pas un nombre premier.

Exercice les entiers suivants sont ils premiers ? Si ce n'est pas le cas, citer un diviseur non trivial. $n_1 = 18$ $n_2 = 17$ $n_3 = 31$ $n_4 = 12$ $n_5 = 10^5$

Non (6) oui oui non (3) non (10)

Un classique : le crible d'Eratosthene (mathématicien grec de l'école d'Alexandrie, – 276 , – 194)

Dans cette liste des entiers naturels de 1 à 99 : barrer 1 ; barrer les multiples de 2 sauf 2, les multiples de 3 sauf 3, les multiples de 5 sauf 5 et les multiples de 7, sauf 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

2.3 déterminations de diviseurs

– Un nombre entier est divisible par 2 s'il se « termine » par : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

– Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.

Exemple (sans machine !) : les nombres suivants sont-ils divisibles par 3 ?

$n_1 = 18651$	$n_2 = 211.111.111.111.111$	$n_3 = 2828$	$n_4 = 10^{23}$
<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>non</i>

– Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9.

Exemple (encore sans machine !) : les nombres suivants sont-ils divisibles par 9 ?

$n_1 = 18651$	$n_2 = 111\ 111\ 111$	$n_3 = 2889$	$n_4 = 10^{23}$
<i>non</i>	<i>oui (somme 9)</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>

– Un nombre entier est divisible par 11 si la somme alternée de ses chiffres est elle-même divisible par 11.

Exemple : les nombres suivants sont-ils divisibles par 11 ?

$n_1 = 18651$	$n_2 = 5192$	$n_3 = 2889$	$n_4 = 811338$
<i>non</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>

2.4 Décomposition en produit de nombres premiers

Théorème	Soit un entier n , tel que $n \geq 2$
	Alors : Soit n est premier,
	Soit n admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers (à l'ordre près).

On ordonnera toujours les facteurs, et on utilisera le symbole puissance.

<u>Exercice</u>	Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :			
$n_1 = 10$	$n_2 = 20$	$n_3 = 28$	$n_4 = 20 \times 28$	$n_5 = 10^{23}$
$= 2 \times 5$	$= 2^2 \times 5$	$= 2^2 \times 7$	$= 2^2 \times 5 \times 2^2 \times 5$	$= (2 \times 5)^{23}$
			$= 2^2 \times 2^2 \times 5 \times 7$	$= 2^{23} \times 5^{23}$
			$= 2^4 \times 5 \times 7$	

3 Ecriture scientifique d'un nombre réel

3.1 Rappel sur les puissances

Si n et m sont deux entiers, et a est un réel non nul :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Puissances de 10 : 10^n est un nombre qui s'écrit avec n chiffres 0 après le chiffre 1
 10^{-n} est un nombre qui s'écrit avec n chiffres 0.

Exercice 1 : Ecrire sous forme décimale : 10^4 ; 10^{-3} et 10^{-1}

$$10^4 = 10000 \quad ; \quad 10^{-3} = 0,001 \quad \text{et} \quad 10^{-1} = 0,1$$

Simplifier l'écriture de :

$$6^5 \times 6^{40} = 6^{45} \qquad \frac{10^2}{10^{18}} = 10^{-16} = \frac{1}{10^{16}} \qquad \frac{10^3}{10^{-11}} = 10^{14}$$

3.2 Définition de l'écriture scientifique

L'écriture scientifique d'un réel x positif non nul est l'écriture sous la forme : $x = M \times 10^n$

Où M est un réel vérifiant : $1 \leq M < 10$ et n un entier positif ou négatif (c'est à dire de $\mathbb{Z}$).

M est appelé mantisse de x , et n est appelé ordre de grandeur.

Si x est un réel négatif on procède de manière analogue en précédant d'un signe $-$.

Exercice : Donner l'écriture scientifique des réels

$$\begin{aligned} A &= 222 \quad ; \quad B = 0,00061 \quad ; \quad C = 0,00061 \times 10^{-28} \quad ; \quad D = 1500 \times 10^{120} \quad ; \quad E = \frac{4 \times 10^2}{8 \times 10^8} \\ A &= 2,22 \times 10^2 \quad B = 6,1 \times 10^{-4} \quad C = 6,1 \times 10^{-4} \times 10^{-28} \quad D = 1,5 \times 10^{123} \\ C &= 6,1 \times 10^{-32} \end{aligned}$$